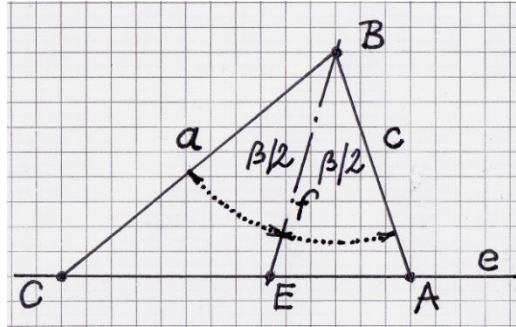


Egy szögfelezős feladat

Az interneten nézelődve találtuk ezt –

<https://hu.wikipedia.org/wiki/Sz%C3%B6gfelez%C5%91> – ; erről jutott eszünkbe az alábbi feladat.

Feladat – 1. ábra



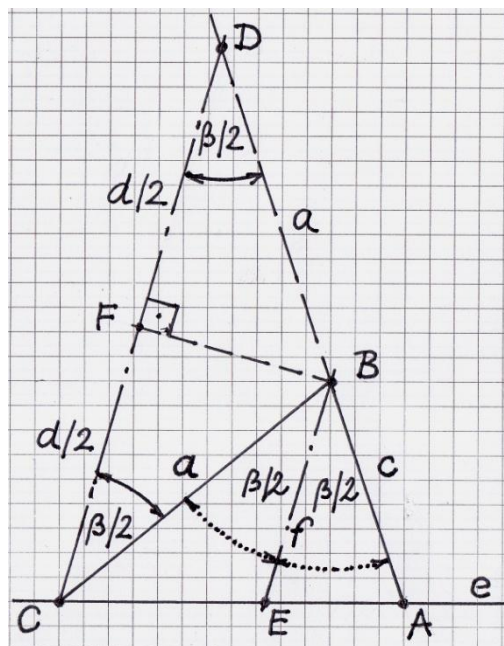
1. ábra

Adott a B pont, amely egy β szög csúcsa. A szög szárainak a és c hosszúsága olyan, hogy C és A végpontjaik az f hosszúságú szögfelező szakasz E végpontjával együtt egy e egyenesen helyezkednek el. Határozza meg a β szög nagyságát! Másképpen mondva:

~ adott: a, c, f ;

~ keresett: β .

Megoldás – 2. ábra



2. ábra

Itt azt látjuk, hogy az 1. ábrához képest annyi a változás, hogy az **AB** szakasz egyenesét meghosszabbítottuk, majd **C** - n keresztül **f** - fel párhuzamosat húzva kaptuk a **D** pontot. Minthogy a **BCD** háromszög egyenlő szárú, így írható, hogy

$$\frac{d/2}{a} = \cos \frac{\beta}{2} \rightarrow d = 2 \cdot a \cdot \cos \frac{\beta}{2} . \quad (1)$$

Az **ABE** és az **ADC** háromszögek hasonlóak, így írható, hogy

$$\frac{f}{c} = \frac{d}{a+c} \rightarrow f = \frac{c}{a+c} \cdot d . \quad (2)$$

Most (1) és (2) - vel:

$$f = \frac{2 \cdot a \cdot c}{a+c} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \rightarrow \cos \frac{\beta}{2} = \frac{a+c}{2 \cdot a \cdot c} \cdot f \rightarrow \frac{\beta}{2} = \arccos \left(\frac{a+c}{2 \cdot a \cdot c} \cdot f \right) , \quad (3)$$

innen:

$$\underline{\underline{\beta = 2 \cdot \arccos \left(\frac{a+c}{2 \cdot a \cdot c} \cdot f \right) .}} \quad (4)$$

Ezzel feladatunkat megoldottuk.

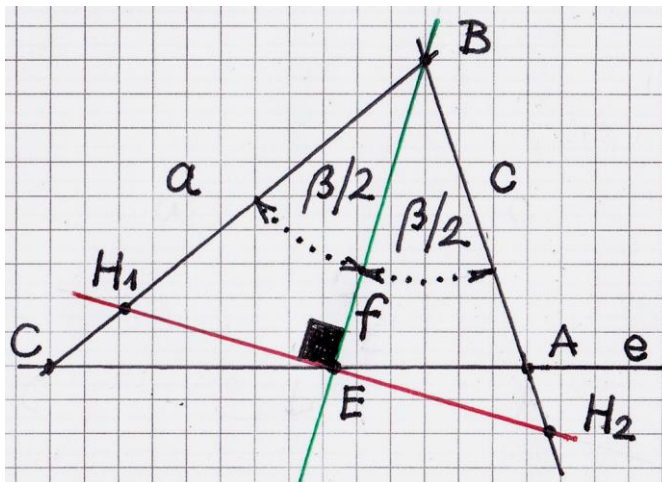
Az **a** = **c** speciális eset vizsgálatát az Olvasóra bízunk.

Megjegyzés:

A

$$\frac{2 \cdot a \cdot c}{a+c} = \frac{2}{\frac{a+c}{a \cdot c}} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{c}} = \frac{1}{\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{c}}{2}} \quad (5)$$

mennyiséget az **a** és **c** számok *harmonikus középértékének* nevezik – [1] . Ez és (3) első egyenlete szerint a szögfelező szakasz hosszát úgy kapjuk, hogy az **a** és **c** szakaszok harmonikus középértékét merőlegesen vetítjük a szögfelező egyenesére – 3. ábra.



3. ábra

Ez rögtön megadja esetünkre a szögszárak hossza harmonikus közepének szerkesztését is:
 ~ a felvett **B** pontból felmérjük az **a** és **c** hosszúságú szakaszokat a β szöget bezáró egyenesekre;

~ a **C** és **A** végpontjaikat összekötjük egy **e** egyenessel;

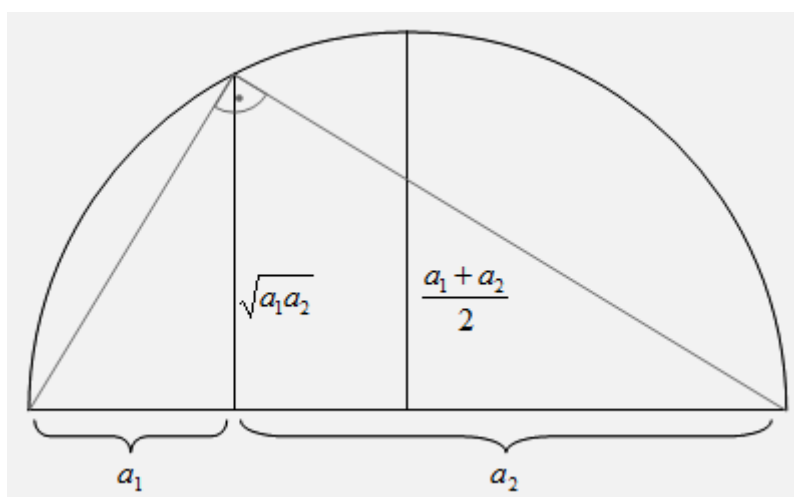
~ megszerkesztjük a β szög felező egyenesét, amivel előáll az **E** metszéspont;

~ **E** - ben merőlegest állítunk a szögfelezőre, ami az **a** és **c** szakaszokból kimetszi a **H₁** és a **H₂** pontokat;

~ a **BH₁** = **BH₂** szakasz(ok) az **a** és **c** szakaszok harmonikus középértéke.

Úgy tűnik, felfedeztük két szám harmonikus közepe szerkesztésének egy módját.

Két szám (**a₁**, **a₂**) számtani és a mértani közepének ismert szerkesztése a 4. ábra szerinti.



4. ábra – forrása: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/hu/b/ba/Sz%C3%A1mtani-m%C3%A9rtani_k%C3%B6z%C3%A9p-egyenesl%C5%91tlens%C3%A9g.png

Felhasznált irodalom:

[1] – **I. N. Bronstejn ~ K. A. Szemengyajev**: Matematikai zsebkönyv
több kiadásban, Műszaki Könyvkiadó, Budapest

Összeállította: **Galgóczi Gyula**
mérnökstanár

Sződliget, 2015. 09. 12.